Troisième École d'Histoire Conceptuelle des Mathématiques
Ubatuba - Brésil

09 - 14 avril 2012

Étude 2

Mohamad AL HOUJAIRI

Université Libanaise et CNRS-Liban
Équipe E.R.T.S.A

Introduction

Les études historiques convergent et conduisent vers la conclusion suivante: le théorème de sinus a été découvert, d'une manière indépendante, par trois mathématiciens de la Tradition Arabe:

[Historical studies converge and lead to the following conclusion: The sine Theorem was discovered independently by three mathematicians of the Arabic Tradition:]

- al-Khujandī, abū Mahmūd (mort en [d.] 1000)
- al-Būzjānī , abū al-Wafā' (mort en [d.] 998)
- Ibn 'Irāq, abū Naṣr (mort en [d.] 1036)

La version initiale grecque *des Sphériques* de Ménélaüs est perdue; elle est conservée dans les traductions et les commentaires arabes.

[The initial Greek version of Menelaus *Spherics* is lost and is preserved in Arabic translations and commentaries.]

Théorème de sinus selon Ibn ‘Irāq

Al-Bīrūnī (mort en 1048) a écrit: « Voie suivie par Abū Nasr, pour la “*figure qui dispense*”, dans la lettre qu’il m’a adressée:

«..les rapports, les uns aux autres, des sinus des côtés d’un triangle formé d’arcs de grands cercles d’une sphère sont égaux aux rapports respectifs des sinus des angles qui leurs sont opposés»[1]…(*La figure qui dispense, selon* Ibn ‘Irāq)

1- On trouve la traduction du texte du théorème d’Abū Nasr (*la figure qui dispense*), par exemple, chez Marie-Thérèse Debarnot, dans *Al-Bīrūnī, Kitāb Maqālīd 'Ilm Al-Hay'a.* Institut Français de Damas. Damas, 1985, (p. 111).

Sine theorem according to Ibn ʿIrāq

Al-Bīrūnī (d. 1048) wrote, "followed by Abū Naṣr Way, for the " figure which provides " in the letter addressed to me:

"..The ratios, ones to others, of sinus of the sides of a triangle formed by arcs of great circles on the sphere are equal to the respective ratios of the sines of the angles opposite to them"

("*figure which provides*" , according to Ibn ʿIrāq)

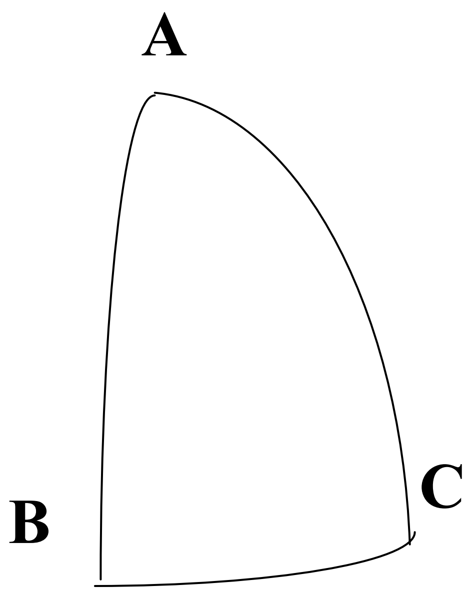


Figure 0

$$\frac{Sin\ \hat{A}}{Sin\ \overset{\frown}{BC}} = \frac{Sin\ \hat{B}}{Sin\ \overset{\frown}{AC}} = \frac{Sin\ \hat{C}}{Sin\ \overset{\frown}{AB}}$$

Ultérieurement on va utilise la notation suivante

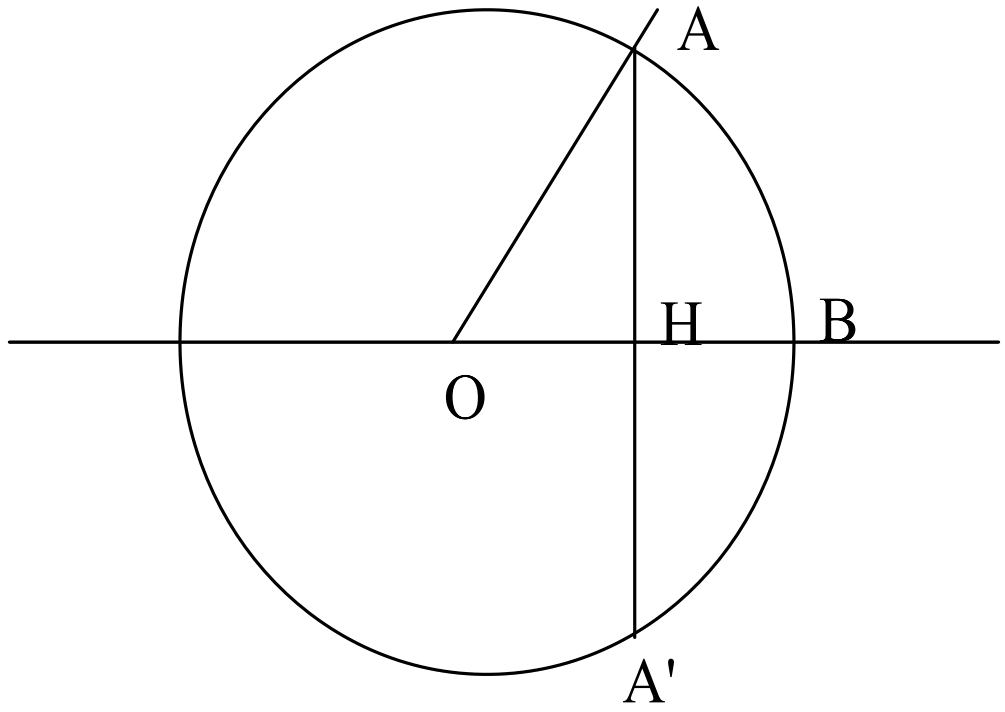
[Later we will use the following notation]:

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}(AB) &= \mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AB)) \\ &= 2\ \mathrm{Sin}(\mathrm{arc}(AB)) \\ &= 2\ R\ \sin(\mathrm{arc}(AB)), \end{aligned}$$

(R est le rayon du cercle; hom: homologue; crd: corde [R is the radius of the circle; hom: homologue; crd: cord])

$$
\begin{aligned}
crd(2arc(AB)) &= sgm(AA') \\
&= hom(arc(AB)) = 2\ Sin\ (arc(AB)) \\
&= 2.R.sin\ (arc(AB)) = 2\ sgm(AH),
\end{aligned}
$$

(R est le rayon du cercle; hom: homologue; crd: corde)



Théorème de Ménélaüs (*figure secteur*)
[Theorem of Menelaus (*sector figure*)]

1) $$\frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{BE}} = \frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{DF}} \cdot \frac{\sin \widehat{FC}}{\sin \widehat{CE}},$$

2) $$\frac{\sin \widehat{AE}}{\sin \widehat{BE}} = \frac{\sin \widehat{AF}}{\sin \widehat{FD}} \cdot \frac{\sin \widehat{DC}}{\sin \widehat{CB}}.$$

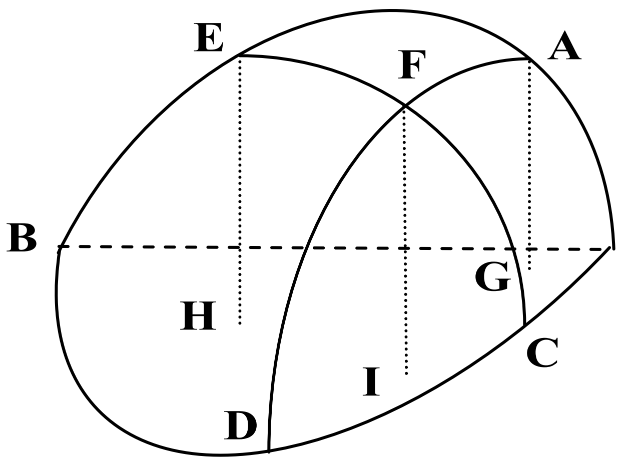


Fig. 2

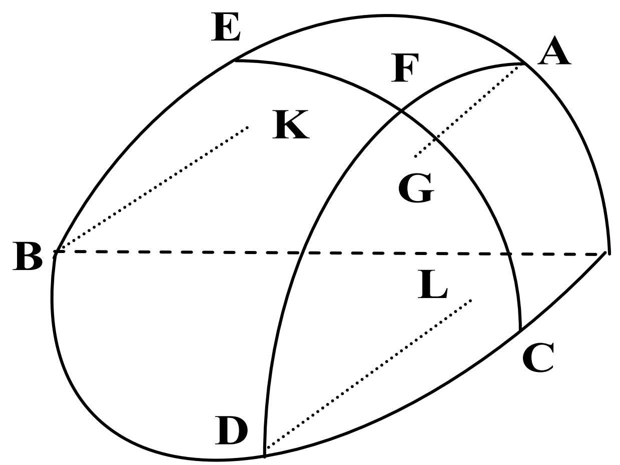


Fig. 3

AL HOUJAIRI .M

Bibliographie principale

- **M.-Th. Debarnot:**

1- “Trigonometria”, dans *Storia della Scienza*, vol. III, Istituto della EnciclopediaItaliana (Rome, 2002), pp. 432–47.

2- Al-Bīrūnī, *Kitāb Maqālīd ʿilm al-hayʾa, La Trigonométrie sphérique chez les Arabes de l’Est à la fin du Xᵉ siècle*, édition et traduction par M.-Th. Debarnot (Damas, 1985).

- Hélène Bellosta, “Le Traité de Thābit ibn Qurra sur *La figure secteur*”, *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 14, Number 1, March 2004, pp. 145-168.

- MS Copenhague, Bibliothèque Royale, Or. 82.

- *Les Éléments* d’Euclide (*Les ŒUVRES d’Euclide*, trad. F. Peyrard [Paris, 1993]),

- ***Les Sphériques*** **de Théodose de Tripoli (trad. Paul Ver Eecke [Paris, 1959]).**
- **Nasīr al-Dīn al-Tūsī :** ***Tahrīr Kitāb al-Ukar li-Thawdhusıyus*** **(Rédaction des** ***Sphériques*** **de Théodose).**
- **MS, Leiden, Or. 930:** ***Sphériques*** **de Ménélaüs-Ibn ʿIraq**
- ***Les Sphériques*** **de Ménélaüs (milieu du Ier siècle après J.-C.) (Max Krause, "*****Die Spharik von Menelaos aus Alexandrien in der verbesserung von Abū Naṣr Manṣūr b. ʿAlī b. ʿIrāq*****",** ***Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen*****,** ***phil.-hist. Klasse*****, 3, 17 [1936]: 1–116)**

Étude 2

Théorème de Ménélaüs et ses applications dans *l'Istikmāl* d'Ibn Hūd

[Second study:
Theorem of Menelaus and its applications in the *Istikmāl* of Ibn Hūd]

Nous avons déjà mentionné qu'Ibn Hūd développe, dans son livre intitulé *al-Istikmāl* (*La Complétion*), une 'théorie classique' - plutôt d'aspect pédagogique – des géométries sphériques de Théodose (107-43 avant J.-C.) et de Ménélaüs (milieu du premier siècle après J.-C.).

[We already mentioned that Ibn Hūd develops in his book *al-Istikmāl* (The Completion), a 'classical theory' – rather teaching aspect – of spherical geometries of Theodosius (107-43 BC) and Menelaus (mid first century AD).]

Ce développement mené dans le livre d'*al-Istikmāl* passe paradoxalement tout à fait loin du théorème des sinus qu'Ibn Hūd ne mentionne nulle part dans ses *Sphériques*.

[This development conducted in the book of *al-Istikmāl* paradoxically goes completely far from the theorem of sinus that Ibn Hūd did not mention anywhere in his *Spherics*.]

Notre présente étude porte précisément sur le théorème de Ménélaüs et ses applications directes dans l'*Istikmāl* d'Ibn Hūd.

[Our present study specifically concerns the theorem of Menelaus and its direct applications in the *Istikmāl* of Ibn Hūd.]

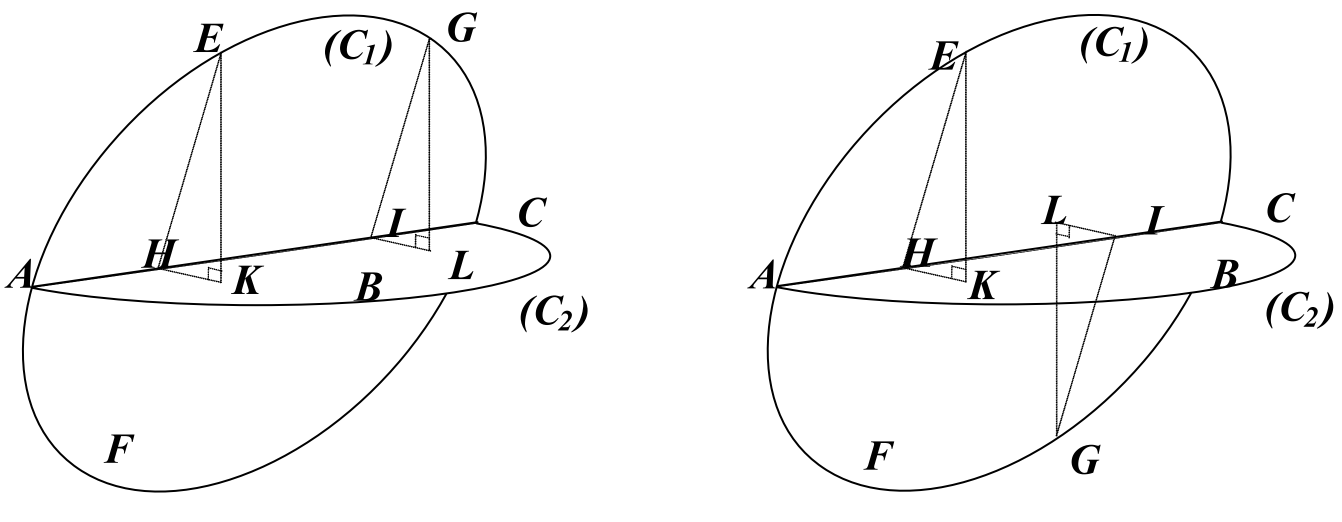
Ensuite, en considérant quelques propositions des *Sphériques* de l'*Istikmāl*, nous allons faire régulièrement recours aux *Sphériques* de Ménélaüs afin de réaliser une comparaison directe entre les deux travaux.

[Then, by considering a few propositions from the *Spherics* of *Istikmāl*, we will regularly use the *Spherics* of Menelaus to realize a direct comparison between the two works.]

§ 9 - Proposition n° 34:

Soient (C_1) et (C_2) deux grands cercles de la sphère tels que arc(C_1) et arc(C_2) se coupent aux points A et C. Si E et G sont deux points arbitraires situés sur la circonférence arc(C_1), différents de A et C et admettant respectivement les points K et L comme projections orthogonales sur le plan du cercle (C_2), alors

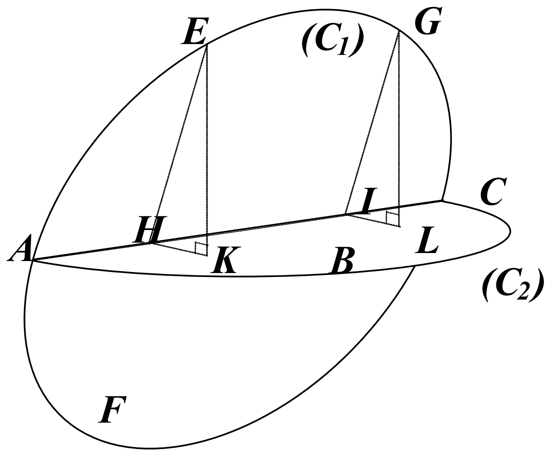
$$\frac{\text{crd}(2\text{arc}(AE))}{\text{crd}(2\text{arc}(AG))}=\frac{\text{sgm}(EK)}{\text{sgm}(GL)} \qquad (1).$$



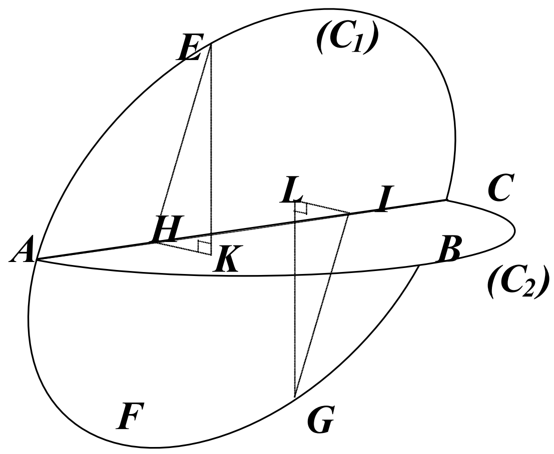
(a) *(b)*

§9 Proposition34: Let (C_1) and (C_2) two great circles on the sphere such that $arc(C_1)$ and $arc(C_2)$ intersect at points A and C . If E and G are two arbitrary points situated on the circumference $arc(C_1)$, different from A and C respectively and admitting the K and L as orthogonal projections on the plane of the circle (C_2), then

$$\frac{crd\,(2arc\,(AE\,))}{crd\,(2arc\,(AG\,))} = \frac{sgm\,(EK\,)}{sgm\,(GL\,)}$$

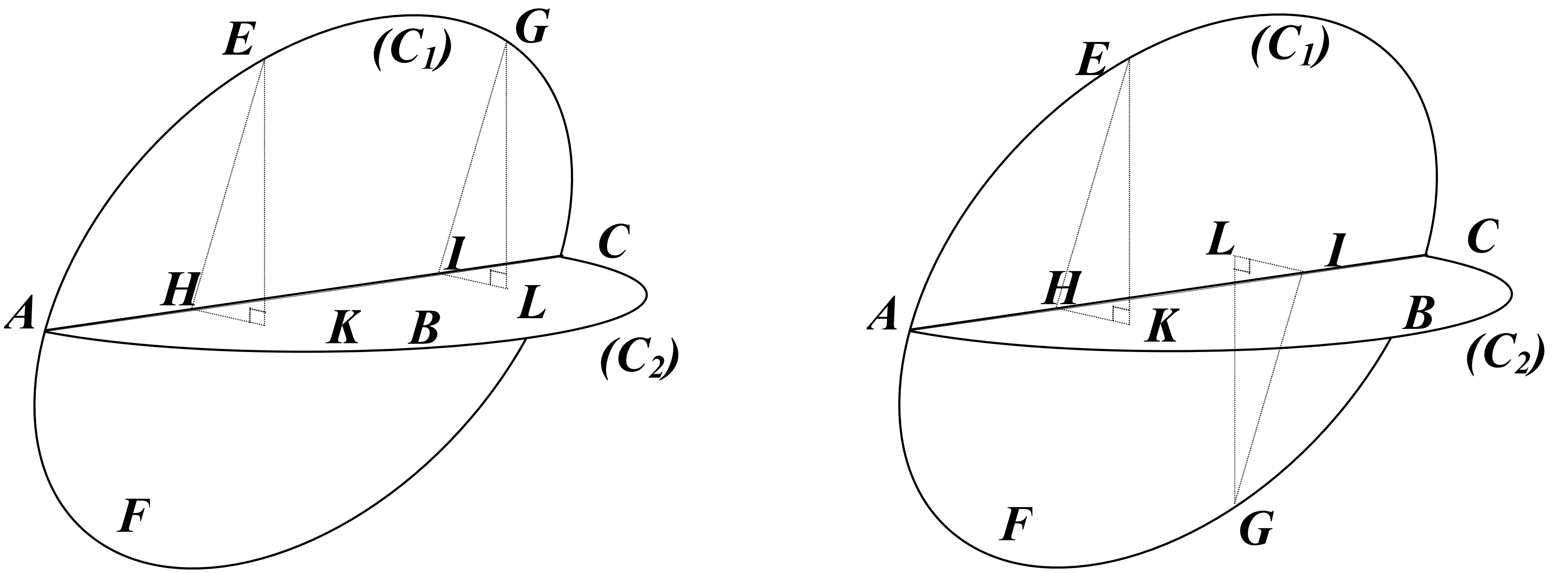


(a)



(b)

$$\frac{crd(2arc(AE))}{crd(2arc(AG))} = \frac{sgm(EK)}{sgm(GL)}$$



(a) (b)

Un résultat, presque identique à celui de la proposition n° 34, est dû à Thābit ibn Qurra (mort en 901). Ce résultat conduit à une élégante démonstration du théorème III, 1 des *Sphériques* de Ménélaüs[1].

[A result, almost identical to that of Proposition No. 34, is due to Thābit ibn Qurra (d. 901). This result leads to an elegant proof of Theorem III, 1 of the Ménélaüs's *Spherics*.]

1 Voir: Marie-Thérèse Debarnot, dans *Al-Bīrūnī, Kitāb Maqālīd 'Ilm Al-Hay'a.* Institut Français de Damas. Damas, 1985; Hélène Bellosta, "Le Traité de Thābit ibn Qurra sur *La figure secteur*", *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 14, Number 1, March 2004, pp. 145-168.

- **§ 10 - Proposition n° 35 (théorème de Ménélaüs)**:

Soient arc(AB), arc(BC), arc(AD) et arc(EC) quatre arcs non coplanaires deux à deux, de grandes circonférences, plus petits chacun qu'une demi-circonférence d'un grand cercle de la sphère et tels que le point E appartienne à arc(AB) et le point D appartienne à arc(BC). Si arc(EC) et arc(AD) se coupent au point F, alors les deux relations suivantes sont satisfaites:

$$\frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AB))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(BE))} = \frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AD))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(DF))} \cdot \frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(FC))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(CE))}$$

$$\frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AE))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(BE))} = \frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AF))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(FD))} \cdot \frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(DC))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(CB))}$$

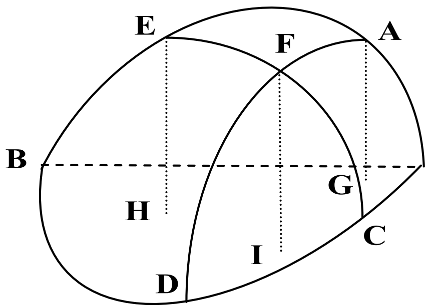


Fig. 2

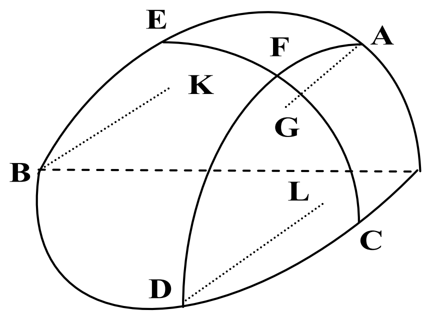


Fig. 3

§ 10 - Proposition n° 35 (Theorem of Menelaus) : Let arc(AB), arc(BC), arc(AD) and arc(EC) are four non-coplanar arcs two to two of great circles, and everyone is smaller than a half-circumference of a great circle of the sphere, and such that point E belongs to arc(AB) and point D belongs to arc(BC). If arc(EC) and arc(AD) intersect at point F, then both relations are satisfied:

$$\frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AB))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(BE))} = \frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AD))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(DF))} \cdot \frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(FC))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(CE))}$$

$$\frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AE))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(BE))} = \frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AF))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(FD))} \cdot \frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(DC))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(CB))}$$

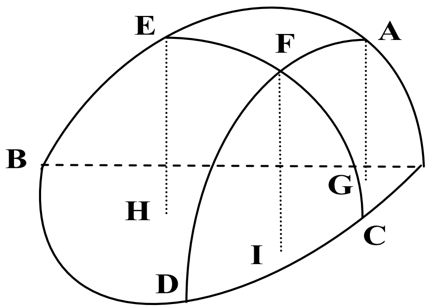


Fig. 2

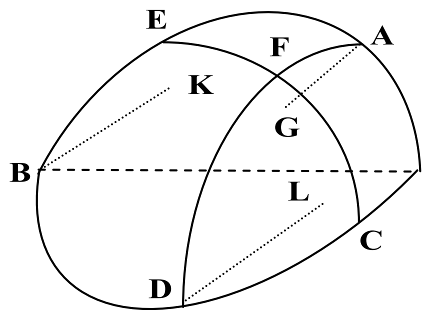


Fig. 3

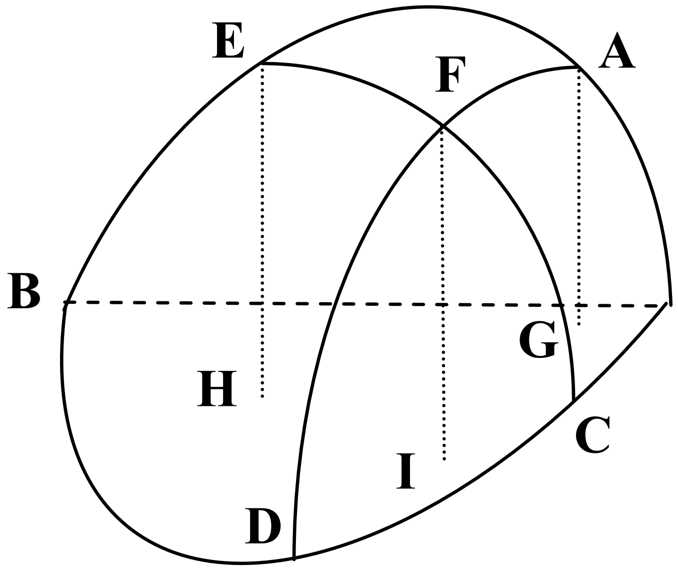


Fig. 2

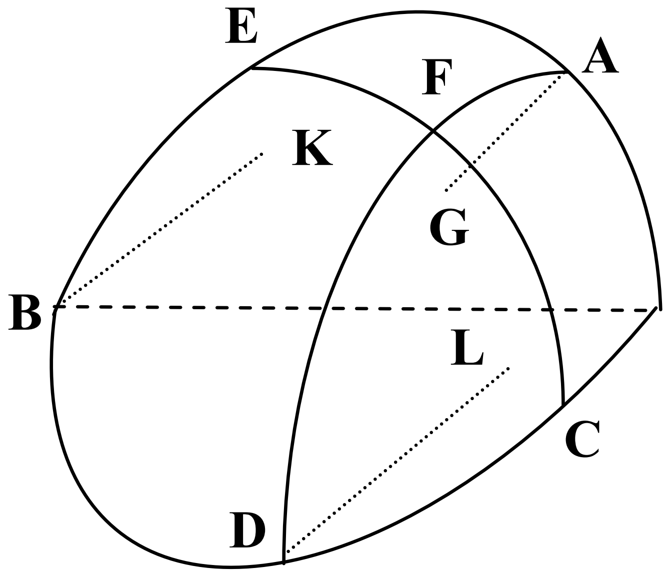


Fig. 3

Abaissons des points A, E et F les perpendiculaires *sgm(AG), sgm(EH) et sgm(FI)* au plan du *cercle(BC)* (voir figure 2). D'après la proposition n° 9, on a :

$$\frac{sgm(AG)}{sgm(EH)} = \frac{crd(2arc(BA))}{crd(2arc(BE))},$$

$$\frac{sgm(AG)}{sgm(FI)} = \frac{crd(2arc(DA))}{crd(2arc(DF))},$$

$$\text{et } \frac{sgm(FI)}{sgm(EH)} = \frac{crd(2arc(CF))}{crd(2arc(CE))} \;.$$

En utilisant l'identité

$$\frac{sgm(AG)}{sgm(EH)} = \frac{sgm(AG)}{sgm(FI)} \frac{sgm(FI)}{sgm(EH)},$$

on obtient

$$\frac{crd(2arc(AB))}{crd(2arc(BE))} = \frac{crd(2arc(AD))}{crd(2arc(DF))} \; \frac{crd(2arc(FC))}{crd(2arc(CE))}.$$

Conduct from points A, E and F the perpendiculars sgm (AG), sgm (EH) and sgm (FI) to the plane of the circle (BC) (see Figure 2). By Proposition 9, we have:

$$\frac{sgm(AG)}{sgm(EH)} = \frac{crd(2arc(BA))}{crd(2arc(BE))},$$

$$\frac{sgm(AG)}{sgm(FI)} = \frac{crd(2arc(DA))}{crd(2arc(DF))},$$

and $$\frac{sgm(FI)}{sgm(EH)} = \frac{crd(2arc(CF))}{crd(2arc(CE))}.$$

Using the identity

$$\frac{sgm(AG)}{sgm(EH)} = \frac{sgm(AG)}{sgm(FI)}\,\frac{sgm(FI)}{sgm(EH)},$$

we obtain

$$\frac{crd(2arc(AB))}{crd(2arc(BE))} = \frac{crd(2arc(AD))}{crd(2arc(DF))}\,\frac{crd(2arc(FC))}{crd(2arc(CE))}.$$

Ménélaüs-Ibn ʿIrāq, proposition III,1:

"Proposition 1: Les deux arcs CE, BD se coupent au point A. Des deux points C et B on décrit les deux arcs CD et BE qui se coupent au point G. On suppose que chacun de ces quatre arcs est d'un grand cercle de la sphère et que chacun est plus petit qu'une demi-cercle. Je dis que le rapport du sinus de l'arc CE au sinus de l'arc EA est composé du rapport du sinus de l'arc CG au sinus de l'arc GD et du rapport du sinus de l'arc BD au sinus de l'arc BA"

["Proposition 1: The two arcs EC, BD intersect at point A. From two points C and B we describe the two arcs CD and BE intersecting at G. It is assumed that each of these four arcs is from a great circle of the sphere and each is smaller than a semi-circle. I say that the ratio of the sine of arc CE to sine of arc EA is composed of ratio of the sine of arc CG to sine of arc GD and of the ratio of the sine of arc BD to the sine of arc BA"]

$$\frac{\sin \overset{\frown}{CE}}{\sin \overset{\frown}{EA}} = \frac{\sin \overset{\frown}{CG}}{\sin \overset{\frown}{GD}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{DB}}{\sin \overset{\frown}{BA}}$$

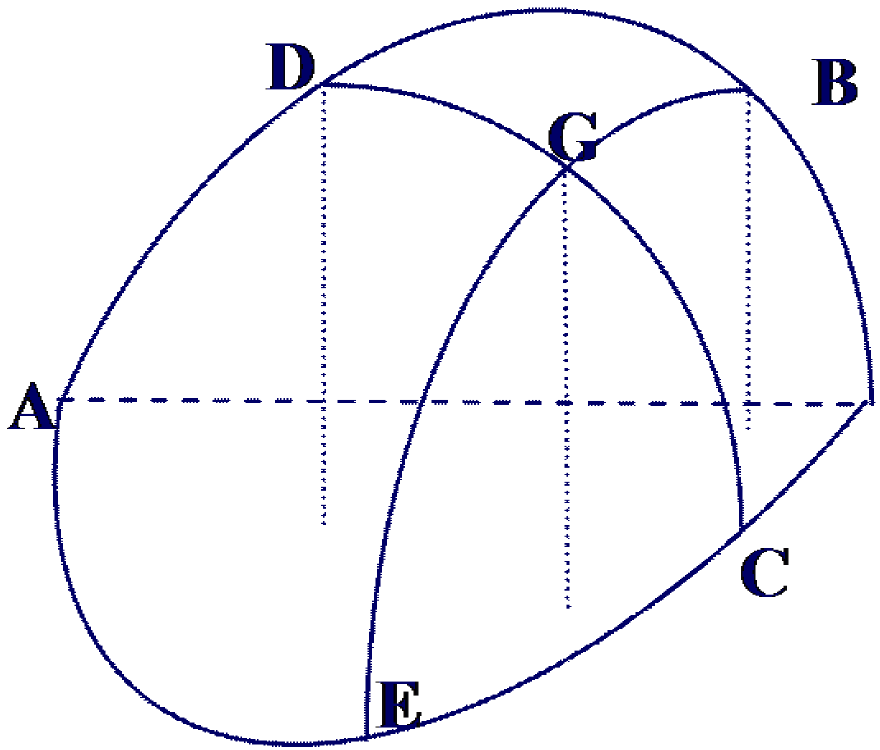


Figure 60

Supposons que nous avons 2 triangles sphériques ABC et DEG, alors la propriété suivante est satisfaite:

[Suppose we have two spherical triangles ABC and DEG, then the following property is satisfied:]

Théorème de 4 quantités (Prop. 36)
[Theorem of 4 quantities]

$$(\widehat{A} = \widehat{D}) \Rightarrow \{[(\widehat{C} = \widehat{G}) \vee (\widehat{C} + \widehat{G} = \pi)] \Leftrightarrow \frac{\mathrm{hom(AB)}}{\mathrm{hom(BC)}} = \frac{\mathrm{hom(DE)}}{\mathrm{hom(EG)}}\}$$

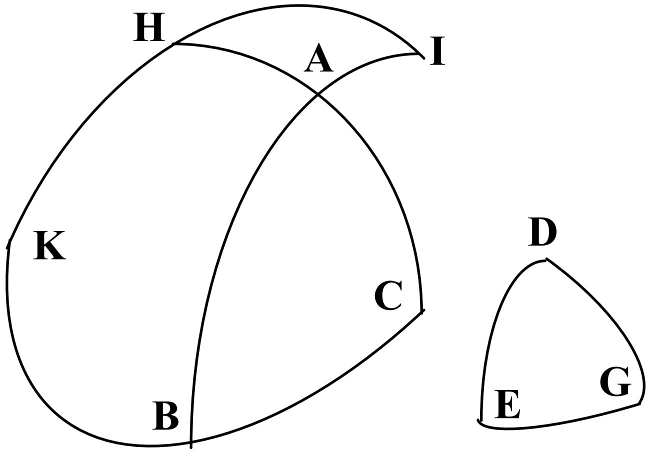


Fig. 4

$$(\widehat{A}=\widehat{D}) \Rightarrow \{[(\widehat{C}=\widehat{G}) \vee (\widehat{C}+\widehat{G}=\pi)] \Leftrightarrow \frac{\mathrm{hom}(AB)}{\mathrm{hom}(BC)} = \frac{\mathrm{hom}(DE)}{\mathrm{hom}(EG)}\}$$

Pour la démonstration à l'aide du théorème de Ménélaüs, ici on est obligé d'introduire une construction supplémentaire.

For demonstration using the theorem of Menelaus, here it is necessary to introduce a supplementary construction.

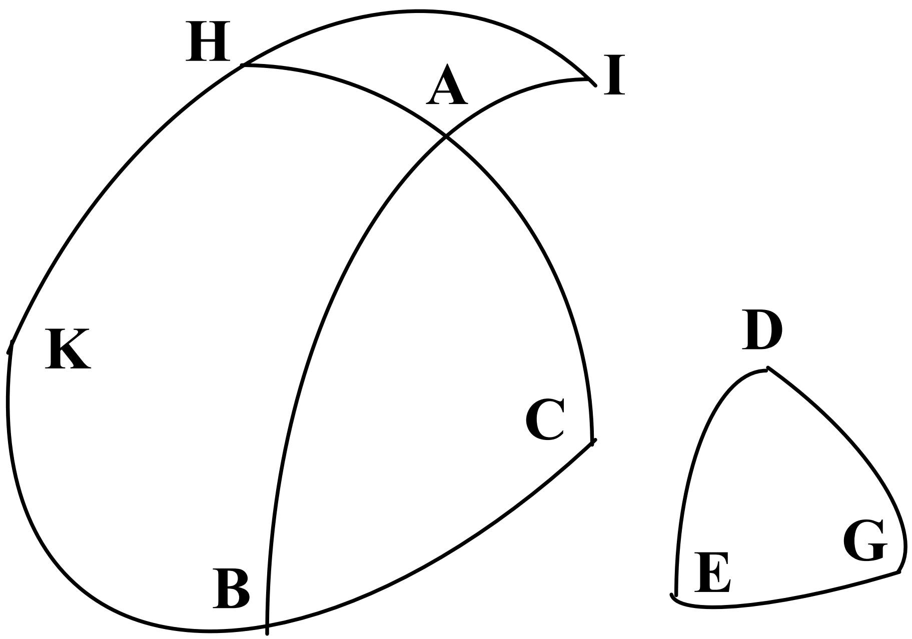


Fig. 4

On trouve le même résultat chez Ménélaüs. Bien qu'Ibn Hūd utilise dans sa proposition le terme “homologue” au lieu du terme “Sinus” utilisé par Ménélaüs, la formulation textuelle ainsi que la démarche démonstrative de la proposition n° 36 coïncident, presque littéralement, avec celles de la proposition correspondante de Ménélaüs. Afin d'effectuer une comparaison concrète, nous exposons, par la suite, la proposition mentionnée de Ménélaüs.

We find the same result at Menelaus. Although Ibn Hūd's proposition uses the term "homologous" instead of "Sinus" used by Menelaus, the textual formulation and the demonstrative approach of proposition coincide almost exactly with those of the corresponding proposition of Menelaus. To make a concrete comparison, we discuss subsequently, the mentioned proposition of Menelaus.

- Ménélaüs-Ibn ʿIrāq, III,2:

«Si, parmi les angles de deux figures trilatères, deux sont respectivement égaux et si deux autres sont soit respectivement égaux, soit d'une somme égale à deux angles droits, alors les rapports des sinus des deux côtés qui sous-tendent les deux angles respectivement égaux aux sinus des autres côtés qui sous-tendent les deux autres angles - qui sont soit respectivement égaux, soit d'une somme égale à deux angles droits - sont deux rapports égaux; et réciproquement».

If, among the angles of two trilateral figures, two are respectively equal, and if the other two are respectively equal, or their sum equals to two right angles, then the ratios of the sinuses of the two sides opposite to both equal angles respectively, to the sinuses of the other sides opposite to other two angles - which are respectively equal, or have a sum equal to two right angles - are two equal ratios, and reciprocally

Ibn ʿIrāq discute la démonstration de la proposition 2 (livre III) de Ménélaüs. Il écrit :

“Si on observe de près et si l’on compare ce que nous avons fait dans « *La figure qui dispense* » et ce que Ménélaüs a fait dans *La figure ‘secteur’* qui exige plusieurs démonstrations, et si l’on sait que les deux angles A et D des deux triangles sont égaux et que le rapport du sinus de l’arc BC au sinus de l’arc BA est égal au rapport du sinus de l’arc EG au sinus de l’arc ED,

"If we observe closely and if we compare what we did in “*figure which provides*’’ and what Menelaus did in the ‘*Sector Figure* ' which requires several demonstrations, and if it is known that both angles A and D of the two triangles are equal and the ratio of the sinus of arc BC to the sinus of arc BA is equal to the ratio of the sinus of arc EG to the sinus of arc ED, il devient clair, rapidement, sans long discours et sans entamer aucune démonstration, à part l'utilisation de *La figure qui dispense* − qui remplace *La figure 'secteur'*−, que les deux angles G et C sont soit égaux, soit de somme égale à deux angles droits, puisque les sinus des deux angles sont égaux".

it becomes clear, quickly, without long speeches and starts without any proof, apart from the use of the *figure which provides* - which replaces the 'Sector Figure '- that both angles G and C are either equal, or their sum equals to two right angles, since the sinuses of the two angles are equal ".

Commentaire sur la note d'Ibn ʿIrāq:

D'après le théorème du sinus, on aura (voir la figure 4):

$$\frac{\mathrm{Sin}(\mathrm{angl}(G))}{\mathrm{Sin}(\mathrm{arc}(DE))} = \frac{\mathrm{Sin}(\mathrm{angl}(D))}{\mathrm{Sin}(\mathrm{arc}(GE))} \quad , \quad \frac{\mathrm{Sin}(\mathrm{angl}(C))}{\mathrm{Sin}(\mathrm{arc}(AB))} = \frac{\mathrm{Sin}(\mathrm{angl}(A))}{\mathrm{Sin}(\mathrm{arc}(CB))}$$

D'autre part, on a:

$$\mathrm{angl}(A) = \mathrm{angl}(D)$$

et

$$\frac{\mathrm{Sin}(\mathrm{arc}(GE))}{\mathrm{Sin}(\mathrm{arc}(DE))} = \frac{\mathrm{Sin}(\mathrm{arc}(CB))}{\mathrm{Sin}(\mathrm{arc}(AB))}$$

Par conséquent, $\mathrm{Sin}(\mathrm{angl}(G)) = \mathrm{Sin}(\mathrm{angl}(C))$;
et par suite, angl(G) et angl(C) sont soit égaux soit supplémentaires.

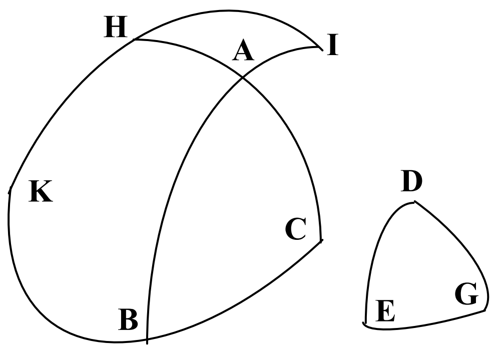


Fig. 4

Comment on the note of d'Ibn ʿIrāq:

By the theorem of sinuses, we have (see Figure 4):

$$\frac{\operatorname{Sin}(\operatorname{angl}(G))}{\operatorname{Sin}(\operatorname{arc}(DE))}=\frac{\operatorname{Sin}(\operatorname{angl}(D))}{\operatorname{Sin}(\operatorname{arc}(GE))} \quad , \quad \frac{\operatorname{Sin}(\operatorname{angl}(C))}{\operatorname{Sin}(\operatorname{arc}(AB))}=\frac{\operatorname{Sin}(\operatorname{angl}(A))}{\operatorname{Sin}(\operatorname{arc}(CB))}$$

On the other hand, we have:

$$\operatorname{angle}(A)=\operatorname{angle}(D)$$

and

$$\frac{\operatorname{Sin}(\operatorname{arc}(GE))}{\operatorname{Sin}(\operatorname{arc}(DE))}=\frac{\operatorname{Sin}(\operatorname{arc}(CB))}{\operatorname{Sin}(\operatorname{arc}(AB))}$$

therefore , $\operatorname{Sin}(\operatorname{angle}(G))=\operatorname{Sin}(\operatorname{angl}(C))$;
and hence, angle(G) and angle(C) are either equal or supplementary.

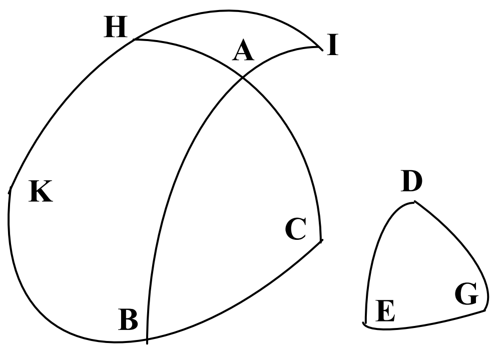


Fig. 4

§ 12 - Proposition n° 37 (règles des tangentes):

Soient ABC et DEG deux triangles sphériques sur la même sphère. Désignons par H (resp. I) le pôle de cercle(AC) (resp. cercle(DG)) qui est du même côté que B (resp. E) par rapport au cercle(AC) (resp. cercle(DG)).

Si

$$\text{angl}(A) = \text{angl}(D) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \qquad \text{angl}(C) = \text{angl}(G) \neq \frac{\pi}{2},$$

alors les deux relations suivantes sont satisfaites (voir la figure 5):

1) $$\frac{\text{hom}(AB)}{\text{hom}(AC)} = \frac{\text{hom}(ED)}{\text{hom}(DG)} \cdot \frac{\text{hom}(BH)}{\text{hom}(EI)}$$

2) $$\frac{\text{hom}(BC)}{\text{hom}(CA)} = \frac{\text{hom}(EG)}{\text{hom}(DG)} \cdot \frac{\text{hom}(BH)}{\text{hom}(EI)}$$

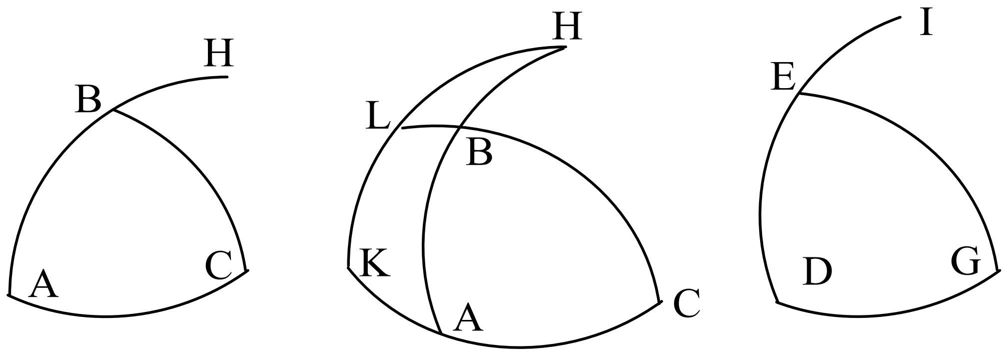


Fig. 5

§ 12 - Proposition n° 37 (Rules of the tangents):

Let ABC and DEG two spherical triangles on the same sphere. Designate by H (resp. I) the pole of a cercle(AC) (resp. cercle(DG)) which is the same side as B (resp. E) relative to the cercle(AC) (resp. cercle(DG)).

If

$$\text{angl(A)} = \text{angl(D)} = \frac{\pi}{2} \quad \text{and} \qquad \text{angl(C)} = \text{angl(G)} \neq \frac{\pi}{2},$$

then the two following relations are satisfied (see Figure 5)

1) $$\frac{\text{hom(AB)}}{\text{hom(AC)}} = \frac{\text{hom(ED)}}{\text{hom(DG)}} \cdot \frac{\text{hom(BH)}}{\text{hom(EI)}}$$

2) $$\frac{\text{hom(BC)}}{\text{hom(CA)}} = \frac{\text{hom(EG)}}{\text{hom(DG)}} \cdot \frac{\text{hom(BH)}}{\text{hom(EI)}}$$

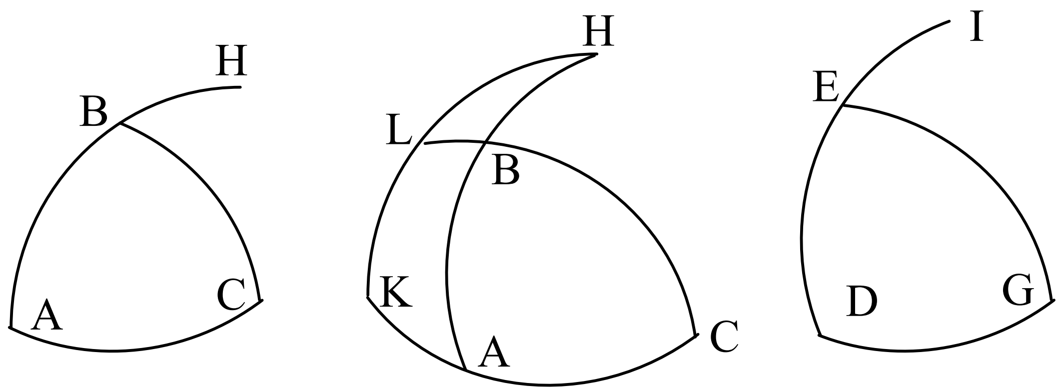


Fig. 5

On trouve le même résultat chez Ménélaüs. Hormis le fait qu'Ibn Hūd utilise dans sa proposition le terme "homologue" au lieu du terme "Sinus" utilisé par Ménélaüs, on remarque, comme auparavant, une pseudo-coincidence textuelle dans les propositions correspondantes des deux auteurs.

We find the same result at Menelaus. Apart from the fact that Ibn Hūd uses in his proposition the term "homologous" instead of "Sinus" used by Menelaus, we note, as before, there is a textual pseudo-coincidence in the corresponding propositions of the two authors.

Ménélaüs-Ibn ʿIrāq III,3

“Si deux figures trilatères sont telles que parmi leurs angles à la base, deux sont droits; si les deux angles restants aux deux bases sont égaux et non droits, alors le rapport des deux sinus des deux côtés entourant l’angle droit de l’une des deux figures, l’un à l’autre, est composé du rapport correspondant des deux sinus des deux côtés entourant l’angle droit de l’autre figure, l’un à l’autre, et du rapport du sinus de l’arc qui est entre le point du sommet de la première figure et le pôle de sa base, au sinus de l’arc, qui est entre le point du sommet de l’autre figure et le pôle de sa base (voir la figure 5a).

If two trilateral figures are such that among their angles at the base, two are rights, and if the remaining two angles at the two bases are equal and not right, then the ratio of the two sinuses of two sides enclosing the right angle of the two figures, one to the other, is composed from corresponding ratios of the two sinuses of two sides enclosing the right angle of the other figure, one to another, and from the ratio of the sinus of the arc that is between the point of the top of the first figure and the pole of its base, to the sinus of the arc, which is between the point of the top of the other figure and the pole of its base (see Figure 5a)

$$\frac{\operatorname{Sin}(\operatorname{arc}(AB))}{\operatorname{Sin}(\operatorname{arc}(AC))} = \frac{\operatorname{Sin}(\operatorname{arc}(ED))}{\operatorname{Sin}(\operatorname{arc}(DG))} \cdot \frac{\operatorname{Sin}(\operatorname{arc}(BH))}{\operatorname{Sin}(\operatorname{arc}(LH))}.$$

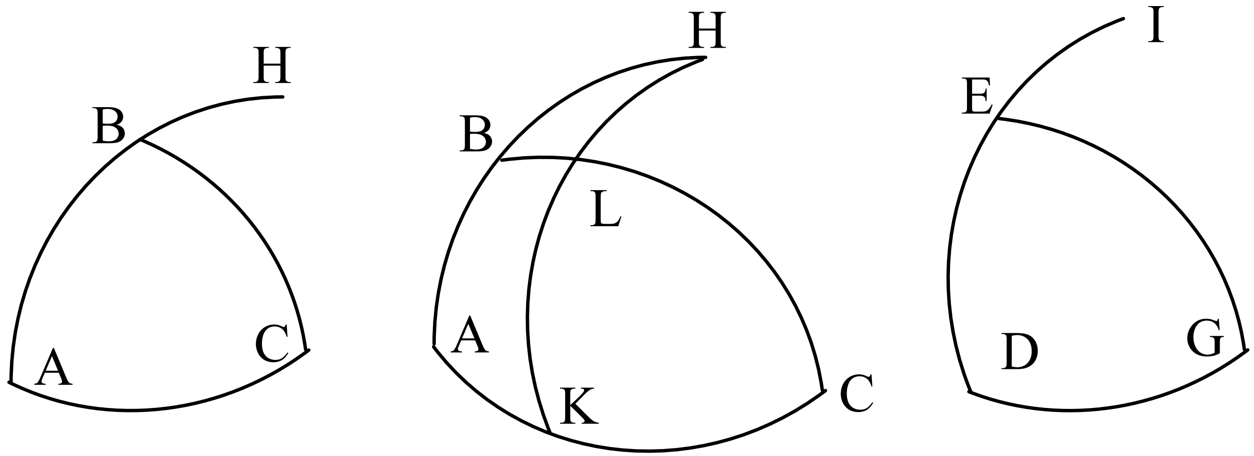


Fig. 5a

Les démonstrations développées par Ménélaüs et d'Ibn Hūd sont basées sur le théorème de Ménélaüs et le théorème de 4 quantités et exigent ici, également, des constructions géométriques supplémentaires.

The developed demonstrations by Menelaus and Ibn Hūd are based on the theorem of Menelaus and the Theorem of 4 quantities, and require, here also the supplementary geometric constructions.

Ibn ʿIrāq critique la démonstration de Ménélaüs d'avoir utilisé une égalité des rapports non fondée et il propose sa propre démonstration basée sur l'application du Théorème sinus.

Ibn ʿIrāq criticizes Menelaus's demonstration of using an unfounded equality of ratios, and he proposes his own demonstration based on the application of the Theorem of sinuses.

§ 13 - Proposition n° 38:

Soient ABC et DEG deux triangles sphériques sur la même sphère; et soit K (resp. L) le pôle de cercle(AC) (resp. cercle(DG)) qui est du même côté que B (resp. E), par rapport au cercle(AC) (resp. cercle(DG)). Désignons par H le point d'intersection de arc(KB) et de arc(AC) et par I celui de arc(LE) et de arc(DG).

Si angl(A) = angl(D) ≠ drt et angl(C) = angl(G) ≠ drt, alors

$$\frac{\text{hom(AH)}}{\text{hom(HC)}} = \frac{\text{hom(DI)}}{\text{hom(IG)}}\text{. (voir la figure 6)}$$

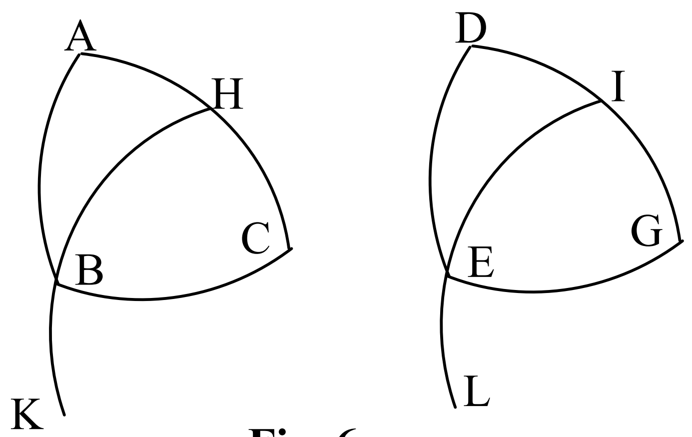


Fig. 6

§ 13 - Proposition n° 38:

Let ABC and DEG two spherical triangles on the same sphere, and let K (resp. L) the pole of cercle(AC) (resp. cercle(DG)) which is the same side as B (resp. E), relative to cercle(AC) (resp. cercle(DG)). Denote by H the intersection of arc(KB) and arc(AC) and I that of arc(LE) and arc(DG

If angl(A) = angl(D) ≠ drt et angl(C) = angl(G) ≠ drt, then

$$\frac{\text{hom(AH)}}{\text{hom(HC)}} = \frac{\text{hom(DI)}}{\text{hom(IG)}}.$$ (see Figure 6)

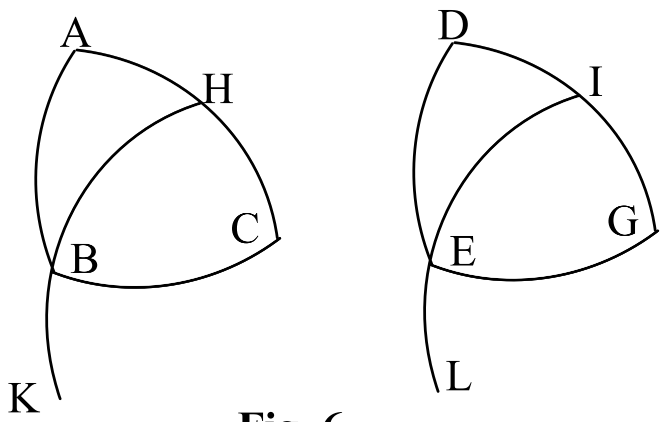


Fig. 6

On trouve, comme auparavant, le même résultat chez Ménélaüs. Hormis le fait qu'ibn Hūd utilise dans sa proposition le terme "homologue" au lieu du terme "Sinus" utilisé par Ménélaüs, on remarque une quasi-coïncidence textuelle dans les propositions correspondantes des deux auteurs. Malgré la différence indiquée, la démonstration conserve la même forme chez les deux auteurs.

Exposons, par la suite, la proposition mentionnée de Ménélaüs:

We find, as before, the same result with Menelaus. Apart from the fact that Ibn Hūd in his proposition uses the term "homologous" instead of "Sinus" used by Menelaus, there is a textual quasi-coincidence in the corresponding propositions of the two authors. Despite the difference shown, the demonstration conserves the same form of both authors. Expose, subsequently, the mentioned proposition of Menelaus:

Ménélaüs-Ibn ʿIrāq, III,4

“Soient deux figures trilatères telles que les angles à la base sont non droits et égaux, chacun à son angle homologue. Si on mène des sommets des deux figures leurs hauteurs, alors les sinus des arcs découpés sur la base sont proportionnels. (Figure 6).

"Let two trilateral figures such that the base angles are not right and equal, each to its homologue angle. If we draw from the vertices of the two figures their heights, then the sinuses of the arcs cut on the base are proportional". (Figure 6)

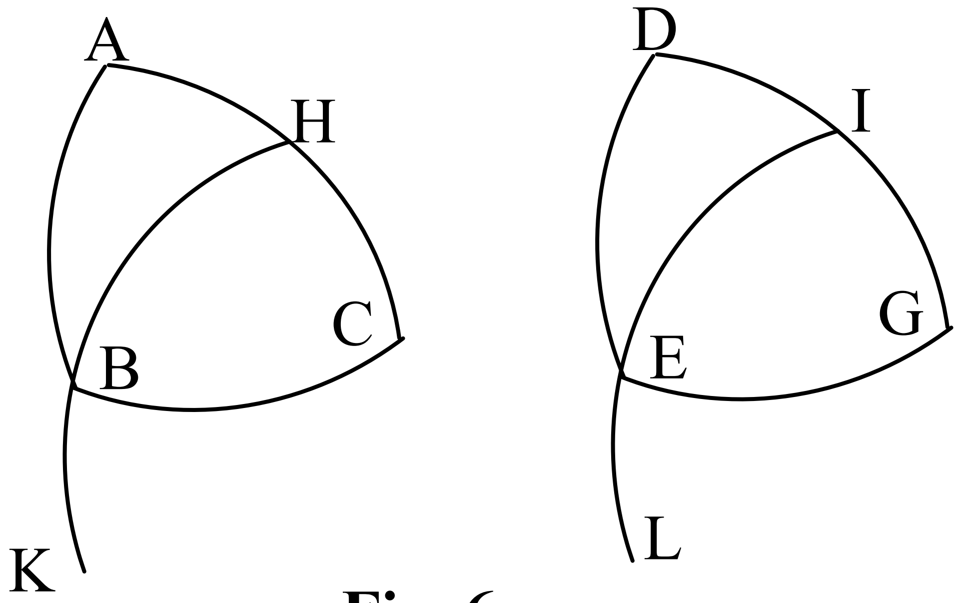


Fig. 6

§ 14 - Proposition n° 39:

1. Si ABC est un triangle sphérique et si D est un point de arc(AC), alors arc(BD) est bissecteur de angl(ABC) si et seulement si

$$\frac{\mathrm{hom(BA)}}{\mathrm{hom(AD)}} = \frac{\mathrm{hom(BC)}}{\mathrm{hom(CD)}} \qquad (1).$$

2. Si DBC est un triangle sphérique et si A est un point sur le prolongement de arc(CD), alors arc(BA) est bissecteur de l'angle adjacent supplémentaire de angl(CBD) si et seulement si

$$\frac{\mathrm{hom(DB)}}{\mathrm{hom(BC)}} = \frac{\mathrm{hom(DA)}}{\mathrm{hom(AC)}} \qquad (2).$$

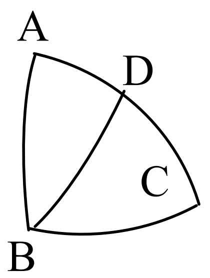


Fig. 7

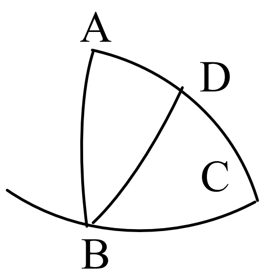


Fig. 7a

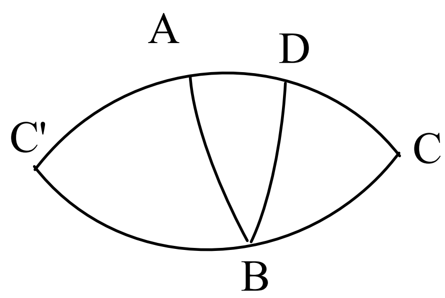


Fig. 7b

§ 14 - Proposition n° 39:

1. If ABC is a spherical triangle and if D is a point of arc (CA), then arc (BD) is bisector of angl(ABC) if and only if

$$\frac{\hom(BA)}{\hom(AD)} = \frac{\hom(BC)}{\hom(CD)} \qquad (1).$$

2. If DBC is a spherical triangle and if A is a point on the prolongation of arc(CD), while arc(BA) is the bisector of the supplementary adjacent angle of angle(CBD) if and only if

$$\frac{\hom(DB)}{\hom(BC)} = \frac{\hom(DA)}{\hom(AC)} \qquad (2).$$

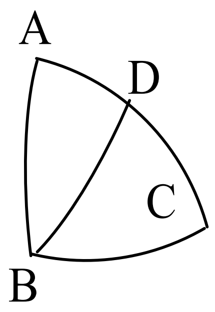


Fig. 7

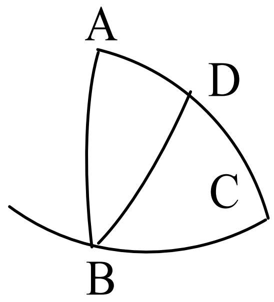


Fig. 7a

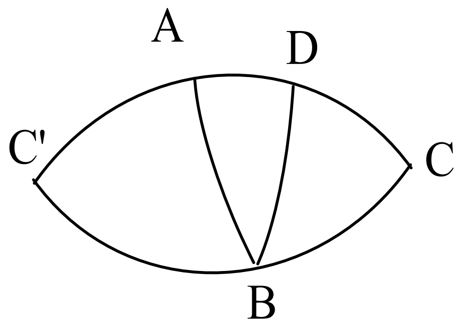


Fig. 7b

On trouve, chez Ménélaüs, les mêmes résultats formulés dans deux propositions. Exposons par la suite l'une d'elles:

We find at Menelaus, the same results expressed in two propositions. Expose subsequently one of them :

Ménélaüs-Ibn ʿIrāq, III,6:

« Si l'angle d'une figure trilatère est divisé en deux moitiés, les rapports des sinus de deux côtés aux sinus des arcs découpés sur la base sont égaux. La réciproque et la permutation sont également valables. »

« If the angle of a trilateral figure is divided into two halves, the ratios of sinuses of two sides to sinuses of the two arcs cut on the base are equal. The reciprocal and the permutation are also valid. »

Ibn ʿIraq commente la démonstration de Ménélaüs il écrit :

«Ménélaüs a construit ceci, en se basant sur ce qu'il a montré dans la proposition 2 (livre III). L'application de la «*figure qui dispense*» nous dispense de cette construction qui devient comme une tautologie».

Ibn 'Iraq comments the demonstration of Menelaus he writes:

« Menelaus built this, based on what he showed in Proposition 2 (Book III). The application of the "*figure which provides*" relieves us of this construction that becomes a tautology».

Conclusion:

Avant la découverte du théorème des sinus au début de XI^{e} siècle, toute la géométrie sphérique reposait en principe sur le théorème III,1 des *Sphériques* de Ménélaüs. Bien que ce dernier ait introduit le concept du triangle (trilatère) sphérique, on remarque que le théorème mentionné a imposé le quadrilatère sphérique (et non pas le triangle) comme unité corpusculaire de manipulation géométrique:

[Before the discovery of the theorem of sinuses in the early eleventh century, all the spherical geometry based principally on the Theorem III,1 of the Menelaus's *Spherics* . Although he introduced the concept of the triangle (trilatère) spherical, we note that the mentioned theorem imposed the spherical quadrilateral (not the triangle) as the corpuscular unit of geometric manipulation.

pour résoudre des problèmes sphériques, on était obligé d'introduire, chaque fois, des constructions géométriques supplémentaires dépendant du problème posé et d'appliquer régulièrement le théorème de Ménélaüs.

to solve spherical problems, we were obliged to introduce, each time, the additional geometric constructions depending on of the considered problem and regularly apply the theorem of Menelaus.

La propriété fondamentale d'invariance structurale exprimée par le théorème des sinus a modifié de façon essentielle la structure et la méthode de la géométrie sphérique:

The fundamental property of structural invariance expressed by the theorem of sinuses has fundamentally altered the structure and the method of spherical geometry

1) Le quadrilatère est remplacé par le triangle comme ‘unité corpusculaire’ adoptée dans la déduction géométrique sur l’étendue de la sphère;

1) The quadrilateral is replaced by the triangle as the “corpuscular unit” adopted in the geometric deduction on the extent of the sphere;

2) les démonstrations sont considérablement réduites grâce à l’élimination des constructions géométriques supplémentaires et occasionnelles qui étaient autrefois nécessaires pour satisfaire les conditions de validité du théorème de Ménélaüs dans les cas des différents problèmes géométriques abordés.

2) The demonstrations are greatly reduced by eliminating of the occasional and additional geometric constructions that were once necessary to satisfy the conditions of validity of the theorem of Menelaus in the case of different addressed geometric problems.

On note qu'Ibn ʿIrāq a nommé le théorème des sinus « *la figure qui dispense*, *al-shakl al-mughnī* », visant par cette dénomination à mettre l'accent sur la priorité de ce théorème et sur la réduction mentionnée dans les démonstrations sphériques due à son application à la place du théorème de Ménélaüs appelé «la *figure secteur*, *al-shakl al qattāʿ*»)

We note that Ibn ʿIrāq appointed the theorem of sinuses " *The figure which provides*, "*al-shakl al-mughnī"* , designed by that name to emphasize the priority of this theorem and the reduction mentioned in the spherical proofs due to its application in place of the theorem of Menelaus called « the *sector figure al-shakl al qattāʿ*») .

Je m’adresse avec un grand merci aux amis brésiliens et français, organisateurs de cette école internationale.

Merci